編號

臺灣省立成功大學土木工程研究所

民58級

碩士論文

張量在測量平差法之運用

研究所主任：周龍章

指導教授：周龍章
卜孔書

作者：何顧榮

中華民國五十八年四月廿六日

張量在測量平差法之運用

摘　　要

本文要旨是在應用張量分析以說明各種平差法既簡明又省事, 把一組觀測方程式之間相互線性無關和觀測方程式中觀測值之間相互線性無關的特性, 以張量式表之，並導出法方程式，然後求解，附有計算例題，驗證該法正確。

目　次

§I. 導　言

在傳統的測量平差文獻中已經說明，所有平差問題最後都可變換為直線方程組求解；譬如有n個呈線性關係的量P^1, P^2, …… P^n 等，其中1, 2, ……n 為上註(superscripts)，而非方次，其相互關係可以下列方程組表示：

$$
\begin{aligned}
u_1^1 P^1 + u_2^1 P^2 + \cdots\cdots + u_n^1 P^n &= u_o^1 \\
u_1^2 P^1 + u_2^2 P^2 + \cdots\cdots + u_n^2 P^n &= u_o^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
u_1^d P^1 + u_2^d P^2 + \cdots\cdots + u_n^d P^n &= u_o^d
\end{aligned}
$$

上式若以張量公式表示，則可簡化為一個式子，即：$u_i^\zeta P^i = u_o^\zeta$ （$i = 1, 2, \cdots\cdots n$; $\zeta = 1, 2, \cdots\cdots d$）。

因此在推演平差法的理論時，應用張量的式子會使演算簡捷，應無疑問。

由於張量計算自有一套應用的公式，隨之而來也就自有一套運算的方法。本文的目的即在研討如何應用張量計算，以解求測量平差問題。

本文自第二節起先介紹與測量平差有關之張量分析之基本運算，然後將其運算應用於推演直接、間接以及五種形式之條件觀測平差，最後應用推演所得之算式計算實例，以資核驗，並作結論。

§II. 張量之基本運算

在測量平差中，一般的觀測方程式都先化為線性方程式，而一組觀測方程式，又必須相互線性無關（linear independant）。同樣，方程式中各個觀測值也必須相互線性無關，然後才可平差，所以本節主要就是討論一組觀測值，與一組方程式相互線性無關時的特性，然後由此特性以推演各觀測值和方程式間各二級張量的共軛關係，及計量式的微分，以應用於解測量平差法。

首先求各個觀測值間相互線性無關時的特性。設有一組量χ^i經線性變換（linear transformation）成一組χ^α的函數，而χ^α為另外一組相互線性無關的量，即一組正交（orthogonal）的向量（vector），其變換方程式為：

$$\chi^i = U^i_\alpha \chi^\alpha \qquad (1)$$

式中：$i = 1, 2, \cdots\cdots n$；$\alpha = 1, 2, \cdots\cdots b$，i與k，$\ell$為同一組指標，有n度空間；$\alpha$與$\beta$，$\gamma$為另一組指標，有b度空間。在一個項中有二個相同的指標，表示總和，而總和可由同一組的任何其他指標，同樣表示，此情形可應用(1)表示之，即：

$$\chi^i = U^i_\alpha \chi^\alpha = U^i_\beta \chi^\beta = U^i_\gamma \chi^\gamma \qquad (2)$$

這種符號的交換運用，是在使運算時能使式子簡化，或使式子表出一般性，在本文中很多，不到處

說明,請讀者特別注意。

設(1)的逆變換(inverse transformation)為：

$$\chi^{\alpha} = U_i^{\alpha}\ \chi^{i} \tag{3}$$

(2)代入(1),得： $\chi^{\alpha} = U_i^{\alpha} u_{\beta}^{i} \chi^{\beta}$ (4)

由於χ^{α}為一組正交的向量,因此由上式關係得知:

$$當\ \alpha = \beta\ 時,\quad U_i^{\alpha} u_{\beta}^{i} = 1$$
$$當\ \alpha \neq \beta\ 時,\quad U_i^{\alpha} u_{\beta}^{i} = 0$$

上述關係應用 Kronecker符號表示,則為：

$$U_i^{\alpha} u_{\beta}^{i} = \delta_{\alpha}^{\beta} \tag{5}$$

若有一線段L,在χ^{α}的b度空間裡,以計量式(metric form)表示為：$(L)^2 = g_{\alpha\beta}\ \chi^{\alpha}\chi^{\beta}$ (6)

式中：$g_{\alpha\beta}$稱為計量張量(metric tensor),括號上之2為次方。

χ^{α}曾規定為一組正交的向量,即在b度空間成正交系(orthogonal coordinate)的一組向量,在張量計算中的規定,當$\alpha \neq \beta$時,$g_{\alpha\beta} = 0$ (7)

只有$\alpha = \beta$時,$g_{\alpha\beta}$才存在,因此可知$g_{\alpha\beta}$的矩陣亦為對角矩陣。$g_{\alpha\beta}$依 Tienstra [12]的推演相當於權(weight)。

上述(5)、(7)為各個觀測值間相互線性無關的特性。今再討論觀測方程式間相互線性無關的特性。

若一組方程式χ^{i}間相互線性有關(linear dependant)時,如求χ^{i}間的關係,可用常量積(scalar product)表示。設χ^{i}間的常量積$\overline{\chi^{i},\chi^{k}}$,由(1)得關係式為:

$$\overline{\chi^{i},\chi^{k}} = u_{\alpha}^{i} u_{\beta}^{k}\ \ \overline{\chi^{\alpha},\chi^{\beta}}$$

式中：$\overline{\chi^{\alpha}, \chi^{\beta}}$ 表示χ^{α}間的常量積，令$\overline{\chi^{i}, \chi^{k}} = G^{ik}$，$\overline{\chi^{\alpha}, \chi^{\beta}} = g^{\alpha\beta}$，則上式改寫為：$G^{ik} = g^{\alpha\beta} u_{\alpha}^{i} u_{\beta}^{k}$ (8)

(8)式為常量積，亦為相關量(amount of correlation)，若 χ^{i}與χ^{k}無關，且 $i \neq k$時，其常量積應為零，即：

$$g^{\alpha\beta} u_{\alpha}^{i} u_{\beta}^{k} = 0 \tag{9}$$

(9)為方程式間相互線性無關的特性。次求各二級張量間的共軛關係。

由常量積的性質知：$\overline{\chi^{\alpha}, \chi^{\beta}} = \overline{\chi^{\beta}, \chi^{\alpha}}$；$\overline{\chi^{i}, \chi^{k}} = \overline{\chi^{k}, \chi^{i}}$

即：$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$，$G^{ik} = G^{ki}$，故$g^{\alpha\beta}$與$G^{\alpha\beta}$均成對稱。

因為χ^{α}間曾規定為一組正交的向量，若$\alpha \neq \beta$，則其常量積應為零，即：$g^{\alpha\beta} = 0$；若$\alpha = \beta$，則$g^{\alpha\beta}$表示χ^{α}本身的長量(length)的平方。由此可知$g^{\alpha\beta}$的矩陣成對角矩陣(diagonal matrix)。若長量均為1，則$g^{\alpha\beta}$為單位矩陣(unit matrix)，以I表示之。

在張量計算中，(6)之$g^{\alpha\beta}$和(8)之$g^{\alpha\beta}$，均可稱為二級張量(tensor of rank 2)。依Tienstra的推演，兩者成共軛(conjugate)關係，$\alpha = \beta$的條件下用 Kronecker符號表示，則為：$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} = \delta_{\beta}^{\gamma}$ (10)

因為L在計量式中為不變量(invariant)，即經任何變換其量不變。

設L在χ^{i}的n度空間中的計量式為：

$$(L)^2 = G_{ik} \chi^{i} \chi^{k} \tag{11}$$

式中：G_{ik}相當於(5)之$g_{\alpha\beta}$。

(11)以(1)代入 得： $(L)^2 = G_{ik}U^i_\alpha U^k_\beta \chi^\alpha \chi^\beta$ (12)

(12)和(6)比較，得： $g_{\alpha\beta} = G_{ik}U^i_\alpha U^k_\beta$ (13)

由(5)的關係式，向(13)乘入 U^α_i 和 U^β_k，

得： $G_{ik} = g_{\alpha\beta}U^\alpha_i U^\beta_k$ (14)

G_{ik} 和 G^{ik} 的關係可仿(10)，最後用Kronecker符號表示，取兩者乘積經(8)和(14)代入，得：

$$G_{ik}G^{i\ell} = (g_{\alpha\beta}U^\alpha_i U^\beta_k)(g^{\alpha\gamma}u^i_\alpha u^\ell_\gamma)$$

由(5)(10) $= \delta^\gamma_\beta U^\beta_k u^\ell_\gamma$

$\beta = \gamma$ 時 $= U^\gamma_k u^\ell_\gamma$

(5)代入 $= \delta^\ell_k$ (15)

由此可知 G_{ik} 為 G^{ik} 之關係成共軛，δ^ℓ_k 若以矩陣表示，則為單位矩陣 I，由(15)的關係，根據矩陣的性質，可知 G_{ik} 為 G^{ik} 的逆矩陣 (inverse matrix)。同時 G_{ik} 亦為 G^{ik} 的逆矩陣。

(12)或(15)的關係祇有當指標，全部同組時方存在，如全為α、β、γ等，或全為i、k、ℓ等，否則其關係不存在。

例如： $\begin{cases} g_{\alpha\beta}g^{\alpha k} = \delta^k_\beta \\ G_{ik}G^{i\beta} = \delta^\beta_k \end{cases}$ (16)

上述(10)，(15)和(16)為二級張量間的共軛性。

再次求計量式的微分，因為 χ^α 為成正交系的一組向量，因而其所有的Christoffel符號為零，且

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \chi^\alpha} = 0 \quad (17)$$

又 $$\frac{\partial \chi^{\beta}}{\partial \chi^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^{\beta} \tag{18}$$

故e^{α}為一組成正交系的單位向量(unit vector),以矩陣表示為：

$$e^{\alpha} = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

今以$(L)^2$對一組向量y^i微分,

$$\begin{aligned} \frac{d(L)^2}{dY^i} &= \chi^{\alpha}\chi^{\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^i} + g_{\alpha\beta}\chi^{\beta}\frac{\partial \chi^{\alpha}}{\partial y^i} + g_{\alpha\beta}\chi^{\alpha}\frac{\partial \chi^{\beta}}{\partial y^i} \\ &= 2g_{\alpha\beta}\chi^{\alpha}\frac{\partial \chi^{\beta}}{\partial y^i} \end{aligned} \tag{20}$$

今若以$(L)^2$向χ^{α}微分,則由 (20)：

$$\begin{aligned} \frac{d(L)^2}{d\chi^{\alpha}} &= \frac{d}{d\chi^{\alpha}}(g_{\alpha\beta}\chi^{\alpha}\chi^{\beta}) \\ &= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \chi^{\alpha}} + g_{\alpha\beta}\chi^{\beta}\frac{\partial \chi^{\beta}}{\partial \chi^{\alpha}} + g_{\alpha\beta}\chi^{\alpha}\frac{\partial \chi^{\alpha}}{\partial \chi^{\alpha}} \\ \text{由(17)、(18)} &= g_{\alpha\beta}\chi^{\alpha}\delta_{\alpha}^{\beta} + g_{\alpha\beta}\chi^{\beta} \\ &= 2g_{\alpha\beta}\chi^{\beta} \end{aligned} \tag{21}$$

以上所述，和以下測量平差法的解說，所應而用的各量,有不變量如L ,向量如χ^{α}和二級張量如$g^{\alpha\beta}$不變量是零級張量(Tensor of rank 0)，向量是一級張量(Tensor of rank 1)，因此以張量之名辭代表全部的量。

一般測量的觀測值具有上述χ^{α}的性質,其觀測方程式χ^{i}的性質應用上述的性質即可說明如下的測量平差法。

§Ⅲ. 直接觀測之平差

一般直接觀測方程式組如下：

$$\varepsilon^{i} = \chi_{\circ}^{i} - p^{i} \qquad (1)$$

式中：i = 1, 2, ……, n， i 與k為同一組指標，

p^{i} 為一觀測量$\chi_{\circ}$的觀測值，ε^{i}為改正數，

g_{ik}為權，設：$\chi_{\circ}^{i} = \chi_{\circ}\mathbf{e}^{i}$ (2)

式中： $\mathbf{e}^{i}$為n度空間成正交的一組單位向量(unit vector)

根據最小二乘法原理，欲使$\chi_{\circ}$為最或是值。必須使改正數平方和為極小，由於g_{ik}當$i \neq k$時為零，故須$i = k$，不等權觀測改正數平方和以$g_{ik}\varepsilon^{i}\varepsilon^{k}$表示， 令 $E = g_{ik}\varepsilon^{i}\varepsilon^{k}$ (3)

E 向$\chi_{\circ}$的微分應為零，即：

$$\frac{d}{d\chi_{\circ}}(g_{ik}\varepsilon^{i}\varepsilon^{k}) = 0 \qquad (4)$$

根據§Ⅱ(20)的推演，得： $g_{ik}\varepsilon^{k}\dfrac{\partial\varepsilon^{i}}{\partial\chi_{\circ}} = 0$ (5)

(1)式之向$\chi_{\circ}$微分，得：$\dfrac{\partial\varepsilon^{i}}{\partial\chi_{\circ}} + \dfrac{\chi_{\circ}^{i}}{\partial\chi_{\circ}} = \mathbf{e}^{i}$ (6)

$\mathbf{e}^{i}$的定義如§Ⅱ(19)。

將(1)和(6)代入(5), 得 $g_{ik}e^i(\chi_\circ^k - p^k) = 0$

或 $g_{ik}e^i\chi_\circ^k = g_{ik}e^i p^k$ (7)

由(2)因為$\chi_\circ^i$為相同的一觀測量$\chi_\circ$, 所以 $g_{ik}e^i\chi_\circ^k$ 即等於$\chi_\circ$和權總和的乘積,令$g_{ik}e^i\chi_\circ^k = g_{ii}\chi_\circ$ (8)

(7)改寫為: $g_{ii}\chi_\circ = g_{ik}e^i p^k$ (9)

式中g_{ii}為權總和將$g_{ik}e^i p^k$和g_{ii}之值求出代入(9)可得觀測量$\chi_\circ$,將$\chi_\circ$代入(1), 得改正數ε^i。

將(6)代入(5), 得: $g_{ik}e^i\varepsilon^k = 0$ (10)

由(1) 計算出來的ε^i代入(10)以做為檢核。

權單位中誤差: $m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{n-1}}$ (11)

§IV. 間接觀測之平差:

一般間接觀測方程式組 如下:

$P^i = a_\lambda^i\chi^\lambda + u_\circ^i$ (1)

式中: $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$; $\lambda = 1, 2, \cdots\cdots, d$.

i與k為同一組指標,λ與μ,υ為另外一組指標,在間接觀測平差中;必須 $n \geqq d$ 。

P^i經觀測而得的觀測值為p^i,改正數為ε^i, χ^λ為未知數, g_{ik}為權。

令: $P^i = p^i + \varepsilon^i$ (2)

(2)代入(1)改寫為: $\varepsilon^i = a_\lambda^i\chi^\lambda + u_\circ^i - p^i$

$= a_\lambda^i\chi^\lambda + t^i$ (3)

(3)為改正數方程式,式中: $t^i = u_\circ^i - p^i$ (4)

根據最小二乘法原理,欲使χ^λ為最或是值。

E必須為極小。

E向χ^λ之微分應為零，即： $\frac{dE}{d\chi^\lambda}=0$ (5)

或：$g_{ik}\varepsilon^k\frac{\partial\varepsilon^i}{\partial\chi^\lambda}=0$ (6)

因為ε^i是向量，(3)之ε^i向χ^λ之偏微分，依§III(20)可得

$$\frac{\partial\varepsilon^i}{\partial\chi^\lambda}=a^i_\lambda\frac{\partial\chi^\lambda}{\partial\chi^\lambda}=a^i_\lambda \qquad (7)$$

(7)代入(6)，得： $g_{ik}a^i_\lambda\varepsilon^k=0$ (8)

(7)和(3)代入(6)，得：

$$g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu\chi^\lambda+g_{ik}a^k_\mu t^i=0$$

按基本運算(8)改寫為： $G_{\lambda\mu}\chi^\lambda+F_\mu=0$ (9)

(9)為法方程式。

式中： $G_{\lambda\mu}=g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu$ (10)

$F_\mu=g_{ik}a^k_\mu t^i$ (11)

(9)乘入$G_{\lambda\mu}$的共軛張量$G^{\lambda\mu}$，即得法方程式之解。

$$\chi^\lambda=-G^{\lambda\mu}F_\mu \qquad (12)$$

$G^{\lambda\mu}$和$G_{\lambda\mu}$的關係為： $G^{\lambda\mu}G_{\lambda\upsilon}=\delta^\mu_\upsilon$ (13)

(12)解得之χ^λ代入(3)可得改正數ε^i，(3)代入(2)得P^i，問題就已解決，在檢核計算及權單位中誤差時，須先求E，如下：

$$E=g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k \qquad (14)$$

由(3) $=g_{ik}\varepsilon^k(a^i_\lambda\chi^\lambda+t^i)$

由(8) $=g_{ik}\varepsilon^k t^i$

由(3) $=g_{ik}(a^k_\mu\chi^\mu+t^k)t^i$

由(11) $=g_{ik}t^i t^k+\chi^\mu F_\mu$ (15)

由(14)和(15)比較，以檢核計算

權單位中誤差 $m=\pm\sqrt{\frac{E}{n-d}}$ (16)

§V.1. 條件觀測之平差：

一般條件觀測方程式均可化為線性方程組(I)如下：

$$u_i^{\zeta}\ P^i = u_o^{\zeta} \tag{1}$$

式中：$\zeta = 1, 2, \cdots\cdots, d$ ； $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$

(1)必須 $d < n$，才有平差。

設 ζ 與 σ，τ 為同一組指標，i 與 k，ℓ 為另外一組指標。

P^i 由觀測而得的觀測值為 η^i，改正數為 ε^i

故：
$$P^i = p^i + \varepsilon^i \tag{2}$$

又設 t^{ζ} 為不符值，g_{ik} 為權，g^{ik} 為權 g_{ik} 的共軛張量，在 $i = k$ 時，g^{ik} 即為權倒數。以(2)代入(1)即可施行平差。(1)之解決一般分成直接法與繫數解法兩種。

本節先說明此兩種解法與的基本原理，然後應用繫數解法於分組平差及所有未知數之條件觀測平差，後者又分別說明兩種形式，多加一條件方程式。

§V.1.1 直接法

若條件方程式不繁多，而其係數又復簡單，可將條件觀測化為間接觀測而求出，即所謂直接法。

設有一組$a_{\circ}^{i}$適合於(1)的觀測量P^{i}，即：

$$u_{i}^{\zeta}\ a_{\circ}^{i} = u_{\circ}^{\zeta} \tag{3}$$

(1)減(3)得：

$$u_{i}^{\zeta}\ (P^{i} - a_{\circ}^{i}) = 0 \tag{4}$$

(4)有α個線性無關齊次方程式，但是(1)有n個未知數，因此尚有(n-d)組的線性無關之解，設(n-d)組(P^{i}- $a_{\circ}^{i}$)的線性無關值a_{λ}^{i}適合於(4)，即：

$$u_{i}^{\zeta}\ a_{\lambda}^{i} = 0 \tag{5}$$

式中：λ = 1, 2, ‥‥ (n-d)，λ 與μ, υ為同一組指標，其他組的解必和a_{λ}^{i} 成線性相關，即：

$$P^{i} - a_{\circ}^{i} = a_{\lambda}^{i}\ \chi^{\lambda}$$

改寫為：$a_{\lambda}^{i}\ \chi^{\lambda} = \varepsilon^{i} + p^{i} - a_{\circ}^{i} = \varepsilon^{i} + f^{i}$

$$\varepsilon^{i} = a_{\lambda}^{i}\ \chi^{\lambda} - f^{i} \tag{6}$$

式中：$f^{i} = p^{i} - a_{\circ}^{i}$ (7)

χ^{λ} 為未知數或稱參數(parameter)。(6)為改正數方程式，此式和間接觀測平差§IV的改正數方程式相當，其解法簡述如下：

由最小二乘法原理, E 向 χ^λ 之微分, 得：

$$g_{ik}a^i_\lambda \varepsilon^k = 0 \tag{8}$$

(6)代入(8), 得: $g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu \chi^\lambda - g_{ik}a^k_\mu f^i = 0$

改寫為: $G_{\lambda\mu}\chi^\lambda = F_\mu$ (9)

式中：$G_{\lambda\mu} = g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu$ (10)

$F_\mu = g_{ik}a^k_\mu f^i$ (11)

(9)為法方程式, 解得: $\chi^\lambda = G^{\lambda\mu}F_\mu$ (12)

$G^{\lambda\mu}$ 和 $G_{\lambda\mu}$ 的關係為： $G^{\lambda\mu}G_{\lambda\upsilon} = \delta^\mu_\upsilon$ (13)

由(12)解得之 χ^λ 代入 (6)得改正數 ε^i, ε^i 代入(2)可得 P^i, 本問題就已解出。

在檢核計算及求權單位中誤差時, 須先求 E, 如下:

$$E = g_{ik}\varepsilon^i \varepsilon^k$$
$$= g_{ik}f^i f^k - F_\mu \chi^\mu \tag{14}$$

上述解法中 χ^λ 數值大時, 解實計算麻煩, 可應用 χ^λ 的近似值 $\chi^\lambda_\circ$ 以簡化之。

令：$\chi^\lambda = \chi^\lambda_\circ + \Delta\chi^\lambda$ (15)

(15)代入(6), 得:

$$a^i_\lambda \Delta\chi^\lambda p^i - a^i_\lambda \chi^\lambda_\circ - a^i_\circ + \varepsilon^i = \Delta f^i + \varepsilon^i \tag{16}$$

$$\varepsilon^i = a^i_\lambda \Delta\chi^\lambda - \Delta f^i$$

式中：$\Delta f^i = p^i - a^i_\lambda \chi^\lambda_\circ - a^i_\circ$ (17)

同樣可得法方程式： $G_{\lambda\mu}\Delta\chi^\lambda = \Delta F_\mu$ (18)

式中：$\Delta F_\mu = G_{ik} a^k_\mu \Delta f^i$ (19)

解得：$\Delta \chi^\lambda = G^{\lambda\mu} \Delta F_\mu$ (20)

由(20)解得之$\Delta\chi^\lambda$代入(16)可得ε^i，代入(15)可得χ^λ。ε^i代入(2)得P^i。

$$E = g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k \quad (21)$$

$$E = g_{ik}\Delta f^i \Delta f^k - \Delta F_\mu \Delta \chi^\mu \quad (22)$$

比較(21)和(22)或比較(21)和(14)，以作檢核。

權單位中誤差：$m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{d}}$

§V.1.2. 繫數解法

若條件方程式為數繁多, 且形式複雜, 則直接法計算頗為不便, 應用繫數解法較為方便, 繫數解法有Gauss 解法、Tienstra 解法兩種, 分述如下：

1.Gauss 解法

Gauss解法原理 如下：

上述條件方程式為:

$$u_i^{\zeta} P^i = u^{\zeta} \qquad (1)$$

$$P^i = p^i + \varepsilon^i \qquad (2)$$

(2)代入(1)，改寫為:

$$u_i^{\zeta} \varepsilon^i = u_\circ^{\zeta} - u_i^{\zeta} p^i = t^{\zeta} \qquad (3)$$

(3)為平差後必須滿足之條件方程式。平差時, 除此之外, 尚須顧及最小二乘法之原理, 使E為極小值, 即：$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k =$ 極小值 (4)

欲使(3)和(4)同時滿足, 須將(3)分別乘以不定係數－$2k_{\zeta}$，並全部和(4)相加, 令整個函數為極小值, 即：

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k - 2k_{\zeta}(u_i^{\zeta}\varepsilon^i - t^{\zeta}) = \text{極小值} \qquad (5)$$

以上即為Gauss 解法的原理。可定係數用－$2k_{\zeta}$的形式是為推演方便。

欲(5)成立, 必須以ε^i向(5)微分, 而令結果為零。由§II(21)得:

得：$g_{ik}\varepsilon^k - u_i^\zeta k_\zeta = 0$ (6)

k_ζ稱為繫數 (correlate),由(6)乘入g_{ik}的共軛張量g^{ik},可得：

$$\varepsilon^k = g^{ik} u_i k_\zeta \quad (7)$$

(7)名為繫數方程式,(7)代入(3),得：

$$g^{ik} u_i^\zeta u_k^\sigma k_\sigma = t^\zeta \quad (8)$$

或 $$G^{\zeta\sigma} k_\sigma = t^\zeta \quad (9)$$

式中： $$G^{\zeta\sigma} = g^{ik} u_i^\zeta u_k^\sigma \quad (10)$$

(9)為法方程式,解得：$k_\sigma = G_{\zeta\sigma} t^\zeta$ (11)

將(11)之結果代入(7),可得改正數ε^i,ε^i再代入(2)求出p^i,問題就已解決。

在檢核計算及求權單位中誤差時,須先求E，如下：

$$E = g_{ik}\varepsilon^i \varepsilon^k \quad (12)$$

(7)乘入g_{ik}，得：$g_{ik}\varepsilon^i = u_k^\sigma k_\sigma$ (13)

(13)代入(12),得：$E = u_k^\sigma \varepsilon^k k_\sigma$

由(3) $= t^\sigma k_\sigma$ (14)

比較(12)和(14)，以作檢核。

權單位中誤差：$m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{d}}$ (15)

2. Tienstra 解法

上述條件方程式： $u_i^{\zeta} p^i = u_o^{\zeta}$ (1)

(1)式有d個條件方程式，n個觀測量，並且n＞d，故其解不定，始產生平差問題，根據繫數解法之步驟，先將(1)加以線性變換，ζ的d度空間擴展至n度空間，形成n個方程式，n個未知數，以解決問題，所增之(n－d)度空間須不影響原有d度空間條件方程式之性質，即保持原有條件，並且(n－d)度空間相互間亦成正交系，即所增加的(n－d)個方程式相互線性無關的特性，和對原有方程式線性無關的特性，而推演得繫數方程式。

今(1)為一線性方程式，經線性變換後，其觀測組之性質不改變，把(1)之ζ的d度空間經線性變換為n度空間。n度空間中，以u_o^{ζ}的d度空間為子空間（subspace），然後應用Schmidt正交法（Schmidt orthogonalization procedure）求出(n－d)度子空間的R^{α}，並且相互間亦成正交系，即線性無關，設變換後為：

$$u_i^{\zeta} p^i = R^{\zeta} \quad (2)$$

$$b^{\alpha} p^i = R^{\alpha} \quad (3)$$

式中： $\alpha = (d+1), (d+2), \cdots\cdots n$，$\alpha$與$\beta$，$\gamma$同一組指標。

由變換的條件中，知：　$R^{\zeta} = u^{\zeta}_{\circ}$

設 P^i 的觀測值 p^i 代入(24)、(25)，得 R^{ζ} 和 R^{α} 的量為 γ^{ζ} 和 γ^{α}，(2)、(3)改寫如下：

$$u^{\zeta}_i p^i = \gamma^{\zeta} \tag{4}$$

$$b^{\alpha}_i P^i = \gamma^{\alpha} \tag{5}$$

由(2)減(4)，(3)減(5)，得：

$$u^{\zeta}_i \varepsilon^i = R^{\zeta} - \gamma^{\zeta} = \eta^{\zeta} \tag{6}$$

$$b^{\alpha}_i \varepsilon^i = R^{\alpha} - \gamma^{\alpha} = \eta^{\alpha} \tag{7}$$

η^{ζ}、η^{α} 為 γ^{ζ}、γ^{α} 的改正數。

由(5)所選用的 γ^{α} 方程式和(4)的方程式成線性無關，並且 γ^{α} 相互間亦成線性無關，因此使 γ^{α} 對 γ^{ζ} 沒有任何影響，即 γ^{α} 對(1)沒有影響，故 γ^{α} 不需改正數，即：$\eta^{\alpha} = 0$　(8)

(7)成為：$b^{\alpha}_i \varepsilon^i = 0$　(9)

因(4)選成和(5)無關，所以兩者常量積應為零，應用§II(9)的性質，得：

$$G^{\sigma\alpha} = g^{ik} u^{\sigma}_k b^{\alpha}_i = 0 \tag{10}$$

上式可看為以 b_i 為變數的齊次方程式，b_i 既然要適合於(9)，也要(10)齊次方程式，因適合於此可看成兩方程式的係數成線性相關。令其相關式為：　$\varepsilon^i = g^{ik} u^{\sigma}_k k_{\sigma}$　(11)

(11)為繫數方程式，和Gauss解法的(7)相同，從此以下的解法亦完全相同，此處不另說明。

§V.2. 條件觀測方程組(Ⅱ):分組平差法

$$u_i^\zeta P^i = u_\circ^\zeta \tag{1}$$

$$u_i^\alpha P^i = u_\circ^\alpha \tag{2}$$

式中: $i = 1, 2, \cdots n$; $\zeta = 1, 2, \cdots\cdots d$;

$\alpha = (d+1), (d+2), \cdots\cdots b$; $n > b$

(1)式用ζ與σ之同一組指標,(2)用α與β之另外之一組指標。

應用前述 §V.1.2 的繫數解法之同樣方法求出繫數方程式為:

$$\varepsilon^i = g^{ik}(u_k^\sigma k_\sigma + u_k^\beta k_\beta) \tag{3}$$

式中: k_σ, k_β 為繫數

因 $$P^i = p^i + \varepsilon^i \tag{4}$$

(4)代入(1),改寫為: $u_i^\zeta \varepsilon^i = u_\circ^\zeta - u_i^\zeta p^i = t^\zeta$ (5)

(4)代入(2)改寫為: $u_i^\alpha \varepsilon^i = u_\circ^\alpha - u_i^\alpha p^i = t^\alpha$ (6)

由(3)各適當乘入對應的 u_i^ζ 並相加,得:

$$u_i^\zeta \varepsilon^i = g^{ik} u_i^\zeta u_k^\gamma k_\gamma + g^{ik} u_i^\zeta u_k^\beta k_\beta \tag{7}$$

(6)代入(7)得:

$$g^{ik} u_i^\zeta u_k^\sigma k_\sigma + g^{ik} u_i^\zeta u_k^\beta k_\beta = t^\zeta$$

改寫為: $$G^{\zeta\sigma} k_\sigma + G^{\zeta\beta} k_\beta = t^\zeta \tag{8}$$

同理得: $$G^{\alpha\sigma} k_\sigma + G^{\alpha\beta} k_\beta = t^\alpha \tag{9}$$

式中: $$G^{\zeta\sigma} = g^{ik} u_i^\zeta u_k^\sigma \tag{10}$$

$$G^{\alpha\beta} = g^{ik} u_i^\alpha u_k^\beta \tag{11}$$

$$G^{\zeta\beta} = g^{ik} u_i^\zeta u_k^\beta \tag{12}$$

$$G^{\alpha\sigma} = G^{ik}\, u_i^\alpha\, u_k^\sigma$$

由(8) 解得繫數 $k_\sigma = G_{\zeta\sigma}\, t^\zeta - G_{\zeta\sigma}\, G^{\zeta\beta}\, k_\beta$ (14)

改寫為：$k_\sigma = \bar{k}_\sigma + \Delta \bar{k}_\sigma$ (15)

式中：$\bar{k}_\sigma = G_{\zeta\sigma}\, t^\zeta$ (16)

$\Delta \bar{k}_\sigma = - G_{\zeta\sigma}\, G^{\zeta\beta}\, k_\beta$ (17)

(16) 相當於(1)直接應用 §Ⅴ1.2 繫數解法的法方程式之解，可知 $\bar{k}_\sigma$ 由(1)直接求出的繫數 (14) 代入(9)，得：

$$(G^{\alpha\beta} - G^{\alpha\sigma}\, G_{\zeta\sigma}\, G^{\zeta\beta})\, k_\beta = t^\alpha - G^{\alpha\sigma}\, G_{\zeta\sigma}\, t^\zeta$$
$$= t^\alpha - G^{\alpha\sigma}\, \bar{k}_\sigma$$

改寫為：$M^{\alpha\beta}\, k_\beta = T^\alpha$ (18)

式中：$M^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta} - G^{\alpha\sigma}\, G_{\zeta\sigma}\, G^{\zeta\beta}$ (19)

$T^\alpha = t^\alpha - G^{\alpha\sigma}\, \bar{k}_\sigma$ (20)

由(18) 解得：$k_\beta = M_{\alpha\beta}\, T^\alpha$ (21)

k_β 代入 (17) 可解 $\Delta \bar{k}_\sigma$，把解出之 $\Delta \bar{k}_\sigma$ 和 $\bar{k}_\sigma$ 代入(15)可解得 k_σ，再把 k_σ 和(21)解得之 k_β 代入 (3) 即可解得改正數 ε^i，ε^i 代入 (4) 可求出 P^i，本問題 $d\delta$ 已解決。在檢核計算及求權單位中誤差時，須先求 E，如下：

$E = g_{ik}\, \varepsilon^i\, \varepsilon^k$ (22)

由(3) $= g^{ik} u_i^\zeta u_k^\sigma k_\zeta k_\sigma + g^{ik} u_k^\beta u_i^\zeta k_\zeta k_\beta + g^{ik} u_k^\sigma u_i^\alpha k_\alpha k_\sigma + g^{ik} u_i^\alpha u_k^\beta k_\alpha k_\beta$

由(8)(9) $= t^\zeta k_\zeta + t^\alpha k_\alpha$ (23)

由(20) $= t^\zeta k_\zeta + G^{\alpha\sigma}\, \bar{k}_\sigma\, k_\alpha + T^\alpha k_\alpha$

由(14)(16) $= \bar{k}_\zeta\, t^\zeta + T^\alpha k_\alpha$ (24)

由(22)和(23)或(24)比較以檢核計算權單位中誤差：

$$m = \pm \sqrt{\frac{E}{B}}$$

B為多餘觀測數。

§V.3. 條件觀測方程式組(Ⅲ)：附有未知數之條件觀測式一

$$u_i^\zeta P^i = u_\circ^\zeta + a_\lambda^\zeta \chi^\lambda \qquad (1)$$

式中：$i = 1, 2, \cdots n$；$\zeta = 1, 2, \cdots d$；$\lambda = 1, 2, \cdots h$

i與k為同一組指標，ζ與σ為同一組指標，λ與μ同一組指標。$n > d - h > 0$

本問題可由d個聯立方程式中消去h個未知數χ^λ，剩下的$(d-h)$個聯立方程式可當做P^i的條件方程式，用§V.1解法解出n個P^i觀測值，選γ_ζ，使：

$$\gamma_\zeta a_\lambda^\zeta = 0 \qquad (2)$$

d個γ_ζ適合於h個a_λ^ζ的齊次線性方程式，並且a_λ^ζ的h組方程式成線性無關。

由(1)適當乘入對應的γ_ζ，並相加，得：

$$\gamma_\zeta u_\lambda^\zeta P^i = \gamma_\zeta u_\circ^\zeta + \gamma_\zeta a_\lambda^\zeta \chi^\lambda$$

由(2)
$$= \gamma_\zeta u_\circ^\zeta \qquad (3)$$

由數學的性質知有$(d-h)$組的γ_ζ可適合於(3)，並且是線性無關。今以γ_ζ^α表示這$(d-h)$組的γ_ζ，γ_ζ^α每組由(3)所得P^i的關係式：

$$\gamma_\zeta^\alpha u_i^\zeta P^i = \gamma_\zeta^\alpha u_\circ^\zeta \qquad (4)$$

(2)成為： $\gamma_{\zeta}^{\alpha} a_{\lambda}^{\zeta} = 0$ (5)

由(4)改寫為：$\gamma_{\zeta}^{\alpha} u_{i}^{\zeta} \varepsilon^{i} = \gamma_{\zeta}^{\alpha} u_{\circ}^{\zeta} - \gamma_{\zeta}^{\alpha} u_{i}^{\zeta} p^{i}$

$$= T^{\alpha} \tag{6}$$

式中： $T^{\alpha} = \gamma_{\zeta}^{\alpha} a^{\zeta} - \gamma_{\zeta}^{\alpha} u_{i}^{\zeta} p^{i}$

$$\varepsilon^{i} = P^{i} - p^{i} \tag{7}$$

(6)應用§V.1.繫數解法,可解出繫數方程式：

$$\varepsilon^{i} = g^{ik} \gamma_{\zeta}^{\alpha} u_{k} æ_{\alpha} \tag{8}$$

(8)代入(7),得法方程式：

$$g^{ik} \gamma_{\zeta}^{\alpha} \gamma_{\sigma}^{\beta} u_{i}^{\zeta} u_{k}^{\sigma} æ_{\alpha} = T^{\beta} \tag{9}$$

γ_{ζ}^{α}為任意選上的,為不增加計算的麻煩,不直接γ_{ζ}^{α},令：

$$\gamma_{\zeta}^{\alpha} æ_{\alpha} = k_{\zeta} \tag{10}$$

(10)代入(8),得： $\varepsilon^{i} = g^{ik} u_{k}^{\zeta} k_{\zeta}$ (11)

(10)代入(9), $g^{ik} u_{i}^{\zeta} u_{k}^{\sigma} \gamma_{\sigma}^{\beta} k_{\zeta} = T^{\beta}$ (12)

由(1)改寫為： $u_{i}^{\zeta} \varepsilon^{i} = u_{\circ}^{\zeta} - u_{i}^{\zeta} \eta^{i} + a_{\lambda}^{\zeta} \chi^{\lambda}$

$$= t^{\zeta} + a_{\lambda}^{\zeta} \chi^{\lambda} \tag{13}$$

式中： $t^{\zeta} = u_{\circ}^{\zeta} - u_{i}^{\zeta} p^{i}$

(11)代入(13),得：

$$g^{ik} u_{i}^{\zeta} u_{k}^{\sigma} k_{\sigma} = t^{\zeta} + a_{\lambda}^{\zeta} \chi^{\lambda} \tag{14}$$

(10)各適當乘入對應的a_{λ}^{ζ},並相加,得：

$$a_{\lambda}^{\zeta} k_{\zeta} = a_{\lambda}^{\zeta} \gamma_{\zeta}^{\alpha} æ_{\alpha} \tag{15}$$

(5)代入(15),得：

$$a_{\lambda}^{\zeta} k_{\zeta} = 0 \tag{16}$$

(14),(16)合成法方程式, 共有(d+h)個方程式, h個未知數 χ^{λ}, d 個繫數 k_{ζ}。因此可解出k_{ζ}和χ^{λ}。

(14)改寫為： $G^{\zeta\sigma}k_{\sigma} = t^{\zeta} + a^{\zeta}_{\lambda}\chi^{\lambda}$ (17)

解出 k_{σ}為：$k_{\sigma} = G_{\zeta\sigma}t^{\zeta} + G_{\zeta\sigma}a^{\zeta}_{\lambda}\chi^{\lambda}$ (18)

式中： $G^{\zeta\sigma} = g^{ik}u^{\zeta}_{i}u^{\sigma}_{k}$ (19)

由(18)代入(16), 得: $G_{\zeta\sigma}a^{\zeta}_{\lambda}a^{\sigma}_{\mu}\chi^{\lambda} = -G_{\zeta\sigma}a^{\sigma}_{\mu}t^{\zeta}$

改寫為: $D_{\lambda\mu}\chi^{\lambda} = -F_{\mu}$ (20)

式中： $D_{\lambda\mu} = G_{\zeta\sigma}a^{\zeta}_{\lambda}a^{\sigma}_{\mu}$

由(18) $F_{\mu} = G_{\zeta\sigma}a^{\sigma}_{\mu}t^{\zeta}$

由(20)解出, 得: $\chi^{\lambda} = -D^{\lambda\mu}F_{\mu}$ (21)

代入(18)得: k_{σ}, 把k_{σ}代入(10)就可求出改正數ε^{i}, ε^{i}再代入(7)求出P^{i}, 本問題就已解決。

在檢核計算及求權單位中誤差時, 須先求E, 如下：

$$E = g_{ik}\varepsilon^{i}\varepsilon^{k} \quad (22)$$

由(11) $= u^{\zeta}_{k}\varepsilon^{k}k_{\zeta}$

由(13) $= (t^{\zeta} + a^{\zeta}_{\lambda}\chi^{\lambda})k_{\zeta}$

由(16) $= k_{\zeta}t^{\zeta}$ (23)

由(22),(23)求出的E相比較,以核對計算。

權單位中誤差： $m = \pm\sqrt{\frac{E}{B}}$ (24)

B為多餘觀測數。

§V.4 條件觀測方程式組(Ⅲ)：附有未知數之條件觀測式二

$$u_i P^i = u_\circ + a_\lambda \chi^\lambda \qquad (1)$$

$$U_\lambda^\alpha \chi^\lambda = U_\circ^\alpha \qquad (2)$$

式中：$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$； $\zeta = 1, 2, \cdots\cdots, d$；
$\lambda = 1, 2, \cdots\cdots, h$； $\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, b$.

i與 k, ζ與σ, λ與υ, α與β, 各為各組的指標。

(1)(2) 適合於：$n > d + b - h > 0$，且$h > b$
式中未知數 h 個,可由(1)(2) 共有的(b+d)個聯立方程式中消去,剩下(d+b−h)個聯立方程式為§V.1問題。

設$B_\circ^\lambda$是一組適合於(2)的數列,即：

$$U_\lambda^\alpha B_\circ^\lambda = U_\circ^\alpha \qquad (3)$$

(2)−(3), 得: $U_\lambda^\alpha(\chi^\lambda - B_\circ^\lambda) = 0 \qquad (4)$

(4)含h個變數($\chi^\lambda - B_\circ^\lambda$)共有b個線性無關的齊次方程式。設有(h − b)組線性無關的數列 B_φ^λ 適合於(4)的方程式的解,即：

$$U_\lambda^\alpha B_\varphi^\lambda = 0 \qquad (5)$$

式中：$\varphi = 1, 2, \cdots\cdots, (h - b)$.

由(4)(5)得悉U_λ^α的變數成線性相關,設為

$$\chi^\lambda = B_\circ^\lambda + B_\varphi^\lambda Z^\varphi \qquad (6)$$

Z^φ為一參數，

(6)代入(1),得：

$$u_i^\zeta P^i = u_\circ^\zeta + a_\lambda^\zeta B_\circ^\lambda + a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda Z^\varphi \qquad (7)$$

(7)改寫為：$u_i^\zeta \varepsilon^i = u_\circ^\zeta + a_\lambda^\zeta B_\circ^\lambda - u_i^\zeta p^i + a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda Z^\varphi$

$$= \eta^\zeta + a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda Z^\varphi \qquad (8)$$

式中：
$$\eta^\zeta = u_\circ^\zeta + a_\lambda^\zeta B_\circ^\lambda - u_i^\zeta p^i$$

$$\varepsilon^i = P^i - p^i \qquad (9)$$

(7)為§V.3的條件方程式的形式,應用其解法,設

$$\gamma_\zeta^s a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda = 0 \qquad (10)$$

式中： $S = 1, 2, \cdots\cdots, (d+h-b)$.

對(7)取適當γ_ζ^s乘積之和,得：

$$\gamma_\zeta^s u_i^\zeta P^i = \gamma_\zeta^s u_\circ^\zeta + \gamma_\zeta^s a_\lambda^\zeta B_\circ^\lambda + \gamma_\zeta^s a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda Z^\varphi$$

$$= \gamma_\zeta^s u_\circ^\zeta + \gamma_\zeta^s a_\lambda^\zeta B_\circ^\lambda \qquad (11)$$

由(11)改寫為：$\gamma_\zeta^s u_i^\zeta \varepsilon^i = \gamma_\zeta^s u_\circ^\zeta + \gamma_\zeta^s a_\lambda^\zeta B_\circ^\lambda - \gamma_\zeta^s u_i^\zeta p^i$

$$= T^s \qquad (12)$$

由(12)應用§V.1.2的繫數解法,可解出其繫數方程式：

$$\varepsilon^i = g^{ik} \gamma_\zeta^s u_k^\zeta æ_s$$

$$= g^{ik} u_k^\zeta k_\zeta \qquad (14)$$

式中：
$$k_\zeta = \gamma_\zeta^s æ_s \qquad (15)$$

(14)代入(8),得：$g^{ik} u_i^\zeta u_k^\sigma = \eta^\zeta + a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda Z^\varphi$ (16)

對(15)各乘入對應的$a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda$並相加,得：

$$a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda k_\zeta = \gamma_\zeta^s a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda æ_s$$

由(10)代入
$$= 0 \qquad (17)$$

由(16)、(17)合成法方程式,可解出參數Z^φ和繫數k_ζ。然後代入(14),可求出改正數ε^i。

但是(16)、(17)兩式尚需用到B_φ^λ的數,比較麻煩,因此用下法以簡化之。

(16)應用(8)、(14)改寫為：$G^{\zeta\sigma} k_\sigma = t^\zeta + a_\lambda^\zeta \chi^\lambda$ (18)

式中：t^{ζ}為不符值，$t^{\zeta} = u_{\circ}^{\zeta} - u_{i}^{\zeta} p^{i}$ (19)

$$G^{\zeta\sigma} = g^{ik} u_{i}^{\zeta} u_{k}^{\sigma} \qquad (20)$$

B_{φ}^{λ}要適合於(17)的齊次方程式，又要適合於(5)的齊次方程式，因此 兩式之係數必成比例，設為：

$$G_{\lambda}^{\zeta} k_{\zeta} = U_{\lambda}^{\alpha} C_{\alpha} \qquad (21)$$

今由(2)、(18)和(21) 合為法方程式，(2)有b個聯立方程式，(18)有d個聯立方程式，(21)有h個聯立方程式，總共有(b+d+h)個聯立方程式。未知數χ^{λ}有h個，C_{α}有b個，繫數K_{ζ}有d個，三者總共有(b+d+h)個，因此可解出χ^{λ}，C_{α}和K_{ζ}。

解(18)，得：$K_{\sigma} = G_{\zeta\sigma} t^{\zeta} + G_{\zeta\sigma} a_{\lambda}^{\zeta} \chi^{\lambda}$ (22)

(22)代入(21)，得：$a_{\lambda}^{\zeta} G_{\zeta\sigma} t^{\sigma} + G_{\zeta\sigma} a_{\mu}^{\sigma} a_{\lambda}^{\zeta} \chi^{\mu} = U_{\lambda}^{\alpha} C_{\alpha}$

改寫為：$D_{\lambda\mu} \chi^{\mu} = U_{\lambda}^{\alpha} C_{\alpha} - F_{\lambda}$ (23)

式中：$D_{\lambda\mu} = G_{\zeta\sigma} a_{\lambda}^{\zeta} a_{\mu}^{\sigma}$ (24)

$F_{\lambda} = a_{\lambda}^{\zeta} G_{\zeta\sigma} t^{\sigma}$ (25)

(23)，得：$\chi^{\mu} = D^{\lambda\mu} U_{\lambda}^{\alpha} C_{\alpha} - D^{\lambda\mu} F_{\lambda}$ (26)

(26)代入(2)，得：$D^{\lambda\mu} U_{\lambda}^{\alpha} U_{\mu}^{\beta} C_{\alpha} - U_{\mu}^{\beta} D^{\lambda\mu} F_{\lambda} = U_{\circ}^{\beta}$

改寫為：$H^{\alpha\beta} C_{\alpha} = V^{\beta} + U_{\circ}^{\beta}$ (27)

式中：$H^{\alpha\beta} = D^{\lambda\mu} U_{\lambda}^{\alpha} U_{\mu}^{\beta}$ (28)

$V^{\beta} = U_{\mu}^{\beta} D^{\lambda\mu} F_{\lambda}$ (29)

解(27)，得：$C_{\alpha} = H_{\alpha\beta} V^{\beta} + H_{\alpha\beta} U_{\circ}^{\beta}$ (30)

(30)代入(26)，得：χ^{μ}，把χ^{μ}代入(22)，得 K_{σ}。

把k_σ代入(14),可解出改正數ε^i, ε^i再代入(9)求出P^i,本問題就已解決。

在檢核計算及求權單位中誤差時,須先求E,如下:

$$E = g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k \tag{31}$$

由(14) $= u_i^\zeta \varepsilon^i k_\zeta$

由(8) $= (\eta^\zeta + a_\lambda^\zeta B_\varphi^\lambda Z^\varphi) k_\zeta$

由(17) $= \eta^\zeta k_\zeta$ (32)

由(8)、(19) $= k_\zeta t^\zeta + a_\lambda^\zeta B_\circ^\lambda k_\zeta$

由(21) $= k_\zeta t^\zeta + C_\alpha U_\lambda^\alpha B^\lambda$

由(3) $= t^\zeta k_\zeta + C_\alpha U_\circ^\alpha$ (33)

可由(31)和(32)或(33)比較,以做核對計算,

權單位中誤差: $m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{B}}$

B為多餘觀測數。

§VI. 實例：

前述已解釋並導出直接、間接及條件觀測方程式解法的原理與應用的公式，本節將根據前述解法各舉一例以茲對照。

例題中的計算是應用桌面電動計算機，題目資料的來源：直接觀測平差之例題是由「次元解析．最小二乘法と實驗式」所錄出，其他例題均由「測量平差法」一書所錄出，計算出來的結果和原來所載的結果很接近，只有由四捨五入所產生的尾數差，條件觀測之例題只有一個題目，而應用條件觀測平差理論說明中之五種解法來解，以茲對照和比較。

§VI.1 直接觀測平差問題

例：設有一角經六次的測量，各次的權不同，列表如下，試求此角及權單位中誤差。

編號	1	2	3	4	5	6
角度	36°23'26"	36°21'45"	36°22'10"	36°22'35"	36°24'00"	36°23'40"
權	2	4	2	4	2	1

解：$$e^{i^*} g_{ik} p^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36^\circ 23' 20'' \\ 36^\circ 21' 45'' \\ 36^\circ 22' 10'' \\ 36^\circ 22' 35'' \\ 36^\circ 24' 00'' \\ 36^\circ 23' 40'' \end{pmatrix}$$

$$= 545^\circ 40' 00''$$

$$g_{ii} = 15$$

由方程式：$g_{ii} \chi_{\circ} = e^{i^*} g_{ik} p^k$

解得此角： $\chi_{\circ} = \frac{1}{15}(545^{\circ}40'00'')$

$= 36^{\circ}22'40''$

$$\varepsilon^i = \chi^i_{\circ} - p^i = \begin{pmatrix} -40 \\ 55 \\ 30 \\ 5 \\ -80 \\ 60 \end{pmatrix}，即 \begin{array}{l} \varepsilon^1 = -40'' \\ \varepsilon^2 = 55'' \\ \varepsilon^3 = 30'' \\ \varepsilon^4 = 5'' \\ \varepsilon^5 = -1'20'' \\ \varepsilon^6 = -1'0'' \end{array}$$

$$\varepsilon^{i^*} g_{ik} \varepsilon^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0 \\ 0&4&0&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&4&0&0 \\ 0&0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -40 \\ 55 \\ 30 \\ 5 \\ -80 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -80+220+60+20-160-60 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

得知計算無誤。

$$E = \varepsilon^{i^*} g_{ik} \varepsilon^k = 33600$$

權單位中誤差： $m = \pm\sqrt{\frac{E}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{33600}{5}}$

$= \pm 1'\,21''.98$

§VI.2 間接觀測平差問題

例：設 P^1, P^2, P^3 之觀測值 $p^1 = 103.24$ m，

$p^2 = 246.01$ m， $p^3 = 108.43$ m，其觀測

方程式為：

$$P^1 = 0.76\,\chi^1 + 0.65\,\chi^2 + 103.24 \qquad 權\ 0.98$$
$$P^2 = -0.94\,\chi^1 + 0.33\,\chi^2 + 246.01 \qquad 權\ 0.78$$
$$P^3 = 0.33\,\chi^1 - 0.95\,\chi^2 + 110.03 \qquad 權\ 0.85$$

求 P^1, P^2, P^3 及權單位中誤差。

解：改正數方程式如下：

$$\varepsilon^1 = 0.76\,\chi^1 + 0.65\,\chi^2 \qquad 權\ 0.98$$
$$\varepsilon^2 = -0.94\,\chi^1 + 0.33\,\chi^2 \qquad 權\ 0.78$$
$$\varepsilon^3 = 0.33\,\chi^1 - 0.95\,\chi^2 - 1.6 \qquad 權\ 0.85$$

$n = 3$, $d = 2$.

$$a^i_\lambda = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.65 \\ -0.94 & 0.33 \\ 0.33 & -0.95 \end{bmatrix}, \quad t^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix}$$

$$g^{ik} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0.78 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}$$

$$G_{\lambda\mu} = a^{i*}_\lambda g_{ik}\, a^k_\mu = \begin{bmatrix} 1.348 & -0.0243 \\ -0.0243 & 1.266 \end{bmatrix}$$

$$F_\mu = a^{k*}_\mu g_{ik}\, t^i = \begin{bmatrix} -0.4488 \\ 1.292 \end{bmatrix}$$

$$G^{\lambda\mu} = \begin{bmatrix} 0.7421 & 0.0142 \\ 0.0142 & 0.7902 \end{bmatrix}$$

法方程式之解：

$$\chi^\lambda = -G^{\lambda\mu} F_\mu = \begin{bmatrix} 0.315 \\ -1.015 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^i = a^i_\lambda \chi^\lambda + t^i = \begin{bmatrix} -0.420 \\ -0.631 \\ -0.532 \end{bmatrix}$$

$$P^i = p^i + \varepsilon^i = \begin{bmatrix} 102.780 \\ 245.379 \\ 107.898 \end{bmatrix}，即：\begin{matrix} P^1 = & 102.780\text{ m} \\ P^2 = & 245.379\text{ m} \\ P^3 = & 107.898\text{ m} \end{matrix}$$

$$E = \varepsilon^{i*} g_{ik} \varepsilon^k = 0.7240$$

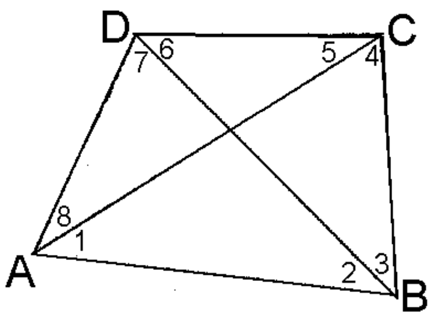
$$E = t^{i*} g_{ik} t^k + F_\mu \chi^\mu$$

$$= 2.176 - 1.4521 = 0.7239$$

可知計算無誤

權單位中誤差：$m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{n-d}} = \pm\sqrt{\dfrac{0.7239}{1}} = \pm\ 0.851$

§Ⅵ.3 條件觀測平差問題



一四邊形如左圖，觀測八個角如下：

L1：42° 38′ 50.″51
L2：41° 33′ 08.″83
L3：37° 48′ 37.″59
L4：57° 59′ 21.″96
L5：29° 37′ 43.″75
L6：54° 34′ 15.″64
L7：70° 46′ 25.″44
L8：25° 01′ 35.″80

設各角度為等精度觀測，求各角度及中誤差。

ΔABC 中球面角超為0.″26，其角度條件式：

$$u^1_i P^i = P^1 + P^2 + P^3 + P^4 = u^1_\circ = 180^\circ + 0.''26$$

整理為：

$$u^1_i \varepsilon^i = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = t^1 = 1.''37 \qquad (1)$$

ΔABD 中球面角超為0.″21，其角度條件式：

$$u_i^2 P^i = P^1 + P^2 + P^3 + P^4 = u_\circ^2 = 180^\circ + 0''21$$

整理為：$u_i^2 \varepsilon^i = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = t^2 = -0''37$ （2）

以C為極的邊長條件式：

$$2.28\varepsilon^1 - 0.39\varepsilon^2 + 2.32\varepsilon^5 - 3.0\varepsilon^6 - 1.5\varepsilon^7 - 4.32\varepsilon^8 = 3.4 \quad (3)$$

以D為極的邊長條件式：

$$0.86\varepsilon^1 - 2.37\varepsilon^2 + 2.71\varepsilon^3 - 0.09\varepsilon^4 - 3061\varepsilon^5 - 3.46\varepsilon^8 = 2.8 \quad (4)$$

（1）、（2）、（3）、（4）為改正數方程式。

根據此問題，以下將分成直接解法、繫數解法、分組解法，及附有未知數之條件觀測形式一與形式二，五種方法解算。

1.應用直接法

若 P^1, P^2, P^3, P^8 的改正數為未知數，令為 $\chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^8$ 則改正數方程式改寫為：

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &= \chi^1 \\
\varepsilon^2 &= \chi^2 \\
\varepsilon^3 &= \chi^3 \\
\varepsilon^4 &= -\chi^1 - \chi^2 - \chi^3 + 1.37 \\
\varepsilon^5 &= -0.26\chi^1 + 0.63\chi^2 - 0.78\chi^3 + 0.96\chi^8 + 0.81 \\
\varepsilon^6 &= 1.26\chi^1 + 0.37\chi^2 + 0.77\chi^3 - 0.94\chi^8 - 0.95 \\
\varepsilon^7 &= -\chi^1 - \chi^2 - \chi^8 - 0.37 \\
\varepsilon^8 &= \chi^8
\end{aligned}$$

$i,\ k = 1,2,\cdots\cdots 8;\quad \lambda, \mu = 1, 2, 3, 8.$

由於等權觀測，故令：$g_{ik} = g^{ik} = I$

$$a_{\lambda}^{i*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -0.26 & 1.26 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0.63 & 0.37 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -0.78 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.96 & -0.94 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{\lambda\mu} = a_{\lambda}^{i*} g_{ik} a_{\mu}^{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 4.655 & 2.302 & 2.173 & -0.433 \\ 2.302 & 3.534 & 0.794 & 1.257 \\ 2.173 & 0.794 & 3.201 & -1.473 \\ -0.433 & 1.257 & -1.473 & 3.805 \end{pmatrix}$$

$$f^{i*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.37 & -0.81 & 0.95 & 0.37 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu} = a_{\mu}^{k*} g_{ik} f^{i} = \begin{pmatrix} 2.408 \\ 0.841 \\ 2.733 \\ -2.041 \end{pmatrix}$$

$$G^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0.452 & -0.266 & -0.215 & 0.0565 \\ -0.266 & 0.5575 & -0.068 & -0.241 \\ -0.215 & -0.068 & 0.577 & 0.221 \\ 0.0565 & -0.241 & 0.221 & 0.4345 \end{pmatrix}$$

解法方程式，得：

$$\chi^{\lambda} = G^{\lambda} F_{\mu} = \begin{pmatrix} 0.162 \\ 0.134 \\ 0.551 \\ -0.349 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^i = a^i_\lambda \chi^\lambda - f^i$$

$$= \begin{bmatrix} 0.162 \\ 0.134 \\ 0.551 \\ -0.847 \\ -0.723 \\ 1.006 \\ 0.053 \\ -0.349 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.37 \\ -0.81 \\ 0.95 \\ 0.37 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.162 \\ 0.134 \\ 0.551 \\ 0.523 \\ 0.087 \\ 0.056 \\ -0.317 \\ -0.349 \end{bmatrix}$$

$$P^i = p^i + \varepsilon^i$$

$$= \begin{bmatrix} 42^\circ 38' 50''672 \\ 41^\circ 33' 08''964 \\ 37^\circ 48' 38''141 \\ 57^\circ 59' 22''483 \\ 29^\circ 37' 43''837 \\ 54^\circ 34' 15''696 \\ 70^\circ 46' 25''123 \\ 25^\circ 01' 35''451 \end{bmatrix} \text{，即} \quad \begin{matrix} P = 42^\circ 38' 50''672 \\ P = 41^\circ 33' 08''964 \\ P = 37^\circ 48' 38''141 \\ P = 57^\circ 59' 22''483 \\ P = 29^\circ 37' 43''837 \\ P = 54^\circ 34' 15''696 \\ P = 70^\circ 46' 25''123 \\ P = 25^\circ 01' 35''451 \end{matrix}$$

檢核：

$$E = \varepsilon^{i*} g_{ik} \varepsilon^k = 0.854$$

$$E = f^i g_{ik} f^k - F^*_\mu \chi^\mu = 3.573 - 2.721 = 0.852$$

兩者之差,僅因計算時,四捨五入的影響,故無誤。

中誤差：$m = \pm \sqrt{\dfrac{E}{d}} = \pm \sqrt{\dfrac{0.853}{4}} = \pm 0''462$

2. 應用繫數解法

由改正數方程式：

$i, k = 1, 2, \cdots\cdots 8$ ； $\zeta, \sigma = 1, 2, 3, 4.$

$$u_i^{\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2.28 & -0.39 & 2.32 & 0 & 0 & -3.0 & -1.5 & -4.32 \\ 0.86 & -2.37 & 2.71 & -0.09 & 3.61 & 0 & 0 & -3.46 \end{bmatrix}$$

$$g_{ik} = g^{ik} = I$$

$$t^{\zeta *} = \begin{bmatrix} 1.37 & -0.37 & 3.4 & 2.8 \end{bmatrix}$$

$$G^{\zeta\sigma} = u_i^{\zeta} g^{ik} u_k^{\sigma *}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4.21 & 1.11 \\ 2 & 4 & -3.93 & -4.97 \\ 4.21 & -3.93 & 40.6453 & 24.1195 \\ 1.11 & -4.97 & 24.1195 & 38.7124 \end{bmatrix}$$

$$G_{\zeta\sigma} = \begin{bmatrix} 0.5108 & -0.3456 & -0.0814 & -0.0083 \\ -0.3456 & 0.5327 & 0.0648 & 0.0380 \\ -0.0814 & 0.0648 & 0.0523 & -0.0219 \\ -0.0083 & 0.0380 & -0.0219 & 0.0446 \end{bmatrix}$$

法方程式之解：

$$k_{\sigma} = G_{\zeta\sigma} t^{\zeta}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5277 \\ -0.3442 \\ -0.0190 \\ 0.0250 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^{i} = g^{ik} u_k^{\sigma *} k_{\sigma}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1617 \\ 0.1317 \\ 0.5514 \\ 0.5255 \\ 0.0903 \\ 0.0570 \\ -0.3157 \\ -0.3486 \end{bmatrix}$$

$$P^i = p^i + \varepsilon^i$$

$$= \begin{pmatrix} 42°\,38'\,50''.6717 \\ 41°\,33'\,08''.9617 \\ 37°\,48'\,38''.1414 \\ 57°\,59'\,22''.4855 \\ 29°\,37'\,43''.8403 \\ 54°\,34'\,15''.6970 \\ 70°\,46'\,25''.1243 \\ 25°\,01'\,35''.4514 \end{pmatrix}，即：\begin{array}{l} P^1 = 42°\,38'\,50''.672 \\ P^2 = 41°\,33'\,08''.962 \\ P^3 = 37°\,48'\,38''.141 \\ P^4 = 57°\,59'\,22''.486 \\ P^5 = 29°\,37'\,43''.840 \\ P^6 = 54°\,34'\,15''.697 \\ P^7 = 70°\,46'\,25''.124 \\ P^8 = 25°\,01'\,35''.451 \end{array}$$

檢核： $E = \varepsilon^{i*} g_{ik}\, \varepsilon^k = 0.8563$

$E = t^{\zeta*} k_\zeta = 0.8557$

可知計算無誤。

中誤差： $m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{d}} = \pm\sqrt{\dfrac{0.8560}{4}} = \pm\, 0''.4625$

3. 應用分組解法

以(1)(2)改正數方程式為第一組方程式。

$i, k = 1, 2, \cdots\cdots 8$ ； $\zeta, \sigma = 1, 2$.

$$u_i^\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t^\zeta = \begin{bmatrix} 1.37 \\ -0.37 \end{bmatrix}$$

$$G^{\zeta\sigma} = u_i^\zeta g^{ik} u_k^{\sigma*} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$G_{\zeta\sigma} = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 \\ -0.1667 & 0.3333 \end{bmatrix}，\ \overline{k}_\sigma = G_{\zeta\sigma} t^\zeta = \begin{bmatrix} 0.5183 \\ -0.3517 \end{bmatrix}$$

以(3)(4)改正數方程式為第二組方程式。

$i, k = 1, 2, \cdots\cdots 8$ ； $\alpha, \beta = 1, 2$.

$$u_i^\alpha = \begin{bmatrix} 2.28 & -0.39 & 2.32 & 0 & 0 & -3.0 & -1.5 & -4.32 \\ 0.86 & -2.37 & 2.71 & -0.09 & 3.61 & 0 & 0 & -3.46 \end{bmatrix}$$

$$G^{\alpha\beta} = u_i^{\alpha} g^{ik} u_k^{\beta *} = \begin{pmatrix} 40.6453 & 24.1195 \\ 24.1195 & 38.7124 \end{pmatrix}$$

$$G^{\alpha\sigma} = u_i^{\alpha} g^{ik} u_k^{\sigma *} = \begin{pmatrix} 4.21 & -3.93 \\ 1.11 & -4.97 \end{pmatrix}$$

$$G^{\zeta\beta} = u_i^{\zeta} g^{ik} u_k^{\beta *} = \begin{pmatrix} 4.21 & 1.11 \\ -3.93 & -4.97 \end{pmatrix}$$

$$t^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

$$T^{\alpha} = t^{\alpha} - G^{\alpha\sigma} \overline{k}_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.5642 \\ 2.3226 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1642 \\ 0.4774 \end{bmatrix}$$

$$M^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta} - G^{\alpha\sigma} G_{\zeta\sigma} G^{\zeta\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} 40.6453 & 24.1195 \\ 24.1195 & 38.7124 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16.5714 & 12.2828 \\ 12.2828 & 10.4833 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24.0739 & 11.8367 \\ 11.8367 & 28.2291 \end{pmatrix}$$

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0.0523 & -0.0219 \\ -0.0219 & 0.0446 \end{pmatrix}$$

$$k_{\beta} = M_{\alpha\beta} T^{\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0523 & -0.0219 \\ -0.0219 & 0.0446 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.1642 \\ 0.4774 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.0191 \\ 0.0249 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \overline{k}_{\sigma} = - G_{\zeta\sigma} G^{\zeta\beta} k_{\beta}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0.3333 & -0.1667 \\ -0.1667 & 0.3333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.21 & 1.11 \\ -3.93 & -4.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0191 \\ 0.0249 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0095 \\ 0.0074 \end{bmatrix}$$

繫數 $k_\sigma = \overline{k}_\sigma + \Delta\overline{k}_\sigma = \begin{bmatrix} 0.5278 \\ -0.3443 \end{bmatrix}$

$$\varepsilon^i = g^{ik} u_k^{\sigma *} k_\sigma + g^{ik} u_k^{\beta *} k_\beta$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5278 \\ -0.3443 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.28 & 0.86 \\ -0.39 & -2.37 \\ 2.32 & 2.71 \\ 0.00 & -0.07 \\ 0.00 & 3.61 \\ -3.00 & 0 \\ -1.50 & 0 \\ -4.32 & -3.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0191 \\ 0.0249 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1614 \\ 0.1319 \\ 0.5510 \\ 0.5256 \\ 0.0899 \\ 0.0573 \\ -0.3157 \\ 0.3479 \end{bmatrix}$$

$$P^i = p^i + \varepsilon^i$$

$$= \begin{bmatrix} 42^\circ\ 38'\ 50''.671 \\ 41^\circ\ 33'\ 08''.962 \\ 37^\circ\ 48'\ 38''.141 \\ 57^\circ\ 59'\ 22''.486 \\ 29^\circ\ 37'\ 43''.840 \\ 54^\circ\ 34'\ 15''.697 \\ 70^\circ\ 46'\ 15''.124 \\ 25^\circ\ 01'\ 35''.452 \end{bmatrix}$$

檢核：

$E = \varepsilon^{i*} g_{ik}\, \varepsilon^k = 0.8554$ 　得知計算無誤。

$$E = t^{\zeta *}\, \overline{k}_\zeta + T^{\alpha *} k_\alpha = 0.8402 + 0.0150$$
$$= 0.8552$$

得知計算無誤。

四邊形只需觀測四個角就可固定, 本問題有八個角度觀測, 因此多餘觀測數B = 4 。

中誤差： $m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{B}} = \pm\sqrt{\dfrac{0.8553}{4}} = \pm\, 0''.4624$

4. 應用附有未知數之條件觀測式形式一之解法

若P^2, P^4, P^8 的改正數為未知數，令為χ^2, χ^4, χ^8，則題目的條件方程式改寫為改正數方程式如下：

$$\varepsilon^1 + \varepsilon^3 = 1.37 - \chi^2 - \chi^4$$

$$\varepsilon^1 + \varepsilon^7 = -0.37 - \chi^2 - \chi^8$$

$$2.28\varepsilon^1 + 2.32\varepsilon^3 - 3.0\varepsilon^6 - 1.5\varepsilon^7 = 3.4 + 0.39\chi^2 + 4.32\chi^8$$

$$0.86\varepsilon^1 + 2.71\varepsilon^3 + 3.61\varepsilon^5 = 2.8 + 2.37\chi^2 + 0.09\chi^4 + 3.46\chi^8$$

$$\varepsilon^2 = \chi^2, \quad \varepsilon^4 = \chi^4, \quad \varepsilon^8 = \chi^8$$

$i, k = 1, 2, \cdots\cdots 8$；$\zeta, \sigma = 1, 2, \cdots\cdots 7.$

$$t^{\zeta *} = \begin{bmatrix} 1.37 & -0.37 & 3.4 & 2.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_i^{\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2.28 & 0 & 2.32 & 0 & 0 & -3.0 & -1.5 & 0 \\ 0.86 & 0 & 2.71 & 0 & 3.61 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^{\zeta\sigma} = u_i^{\zeta} g^{ik} u_k^{\sigma *}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4.600 & 3.570 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0.780 & 0.860 & 0 & 0 & 0 \\ 4.60 & 0.780 & 21.831 & 8.248 & 0 & 0 & 0 \\ 3.57 & 0.860 & 8.248 & 21.116 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_{\zeta\sigma} = \begin{pmatrix} 1.873 & -0.745 & -0.305 & -0.167 & 0 & 0 & 0 \\ -0.745 & 0.808 & 0.109 & 0.050 & 0 & 0 & 0 \\ -0.305 & 0.109 & 0.104 & 0.007 & 0 & 0 & 0 \\ -0.167 & 0.050 & 0.007 & 0.071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{\lambda}^{\zeta} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0.39 & 0 & 4.32 \\ 2.37 & 0.09 & 3.46 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\lambda\mu} = a_{\lambda}^{\zeta *} G_{\zeta\sigma} a_{\mu}^{\sigma}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.325 & 1.669 & 1.985 \\ 1.669 & 2.904 & 1.170 \\ 1.985 & 1.170 & 3.506 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu} = a_{\mu}^{\sigma *} G_{\zeta\sigma} t^{\zeta} = \begin{pmatrix} -0.6243 \\ -1.3390 \\ 0.3457 \end{pmatrix}$$

$$D^{\lambda\mu} = \begin{bmatrix} 0.556 & -0.223 & -0.241 \\ -0.223 & 0.487 & -0.036 \\ -0.241 & -0.036 & 0.434 \end{bmatrix}$$

法方程式之解：

$$\chi^{\lambda} = -\ D^{\lambda\mu} F_{\mu}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0.556 & -0.223 & -0.241 \\ -0.223 & 0.487 & -0.036 \\ -0.241 & -0.036 & 0.434 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6243 \\ -1.339 \\ 0.3457 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.132 \\ 0.526 \\ -0.349 \end{bmatrix}$$

$$k_{\sigma} = G_{\zeta\sigma} t^{\zeta} + G_{\zeta\sigma} a^{\zeta}_{\lambda} \chi^{\lambda}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.337 \\ -0.809 \\ -0.086 \\ -0.026 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.809 \\ 0.464 \\ 0.067 \\ 0.051 \\ 0.132 \\ 0.526 \\ -0.349 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.528 \\ -0.345 \\ -0.019 \\ 0.025 \\ 0.132 \\ 0.526 \\ -0.349 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^{i} = g^{ik} u^{\sigma *}_{k} k_{\sigma}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.161 \\ 0.132 \\ 0.552 \\ 0.526 \\ 0.090 \\ 0.057 \\ -0.317 \\ -0.349 \end{bmatrix}$$

$$P^i = p^i + \varepsilon^i = \begin{bmatrix} 42^\circ\ 38'\ 50''.672 \\ 41^\circ\ 33'\ 08''.962 \\ 37^\circ\ 48'\ 38''.142 \\ 57^\circ\ 59'\ 22''.486 \\ 29^\circ\ 37'\ 43''.840 \\ 54^\circ\ 34'\ 15''.697 \\ 70^\circ\ 46'\ 15''.123 \\ 25^\circ\ 01'\ 35''.451 \end{bmatrix}$$

檢核： $E = \varepsilon^{i*} g_{ik}\, \varepsilon^k = 0.858$

$E = k^*_\zeta\, t^\zeta = 0.857$

可知計算無誤。

中誤差： $m = \pm\sqrt{\dfrac{E}{B}} = \pm\sqrt{\dfrac{0.8575}{4}} = \pm\ 0''.463$

5. 應用附有未知數之條件觀測式形式一之解法

設 P^1, P^2, P^3, P^4 之改正數為未知數 $\chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^4$, 改正數方程式改寫為：

$$\varepsilon^1 = \chi^1$$

$$\varepsilon^2 = \chi^2$$

$$\varepsilon^3 = \chi^3$$

$$\varepsilon^4 = \chi^4$$

$$-3.0\varepsilon^6 - 1.5\varepsilon^7 - 4.32\varepsilon^8 = 3.4 - 2.28\chi^1 + 0.39\chi^2 - 2.32\chi^3$$

$$3.61\varepsilon^5 - 3.46\varepsilon^8 = 2.8 - 0.86\chi^1 + 2.37\chi^2 - 2.71\chi^3 + 0.09\chi^4$$

$$\varepsilon^7 + \varepsilon^8 = -0.37 - \chi^1 - \chi^2$$

$$\chi^1+\chi^2+\chi^3+\chi^4 = 1.37$$

$i,\ k = 1, 2, \cdots\cdots 8$; $\zeta, \sigma = 1, 2, \cdots\cdots 7$;

$\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$;

$\alpha, \beta = 1$. $n = 8$, $d = 7$, $b = 1$, $h = 4$,

$n > d + b - h > 0$, $h > b$，適合於條件。

$$u_i^\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.0 & -1.5 & -4.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.61 & 0 & 0 & -3.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{\zeta\sigma} = u_i^\zeta g^{ik} u_k^{\sigma *}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29.9124 & 14.9472 & -5.82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.9472 & 25.0037 & -3.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.82 & -3.46 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_{\zeta\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0853 & -0.0219 & 0.2103 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0219 & 0.0582 & 0.0370 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2103 & 0.0370 & 1.1761 \end{pmatrix}$$

$$a_{\lambda}^{\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.28 & 0.39 & -2.32 & 0 \\ -0.86 & 2.37 & -2.71 & 0.09 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{\lambda\mu} = a_{\lambda}^{\zeta *} G_{\zeta\sigma} a_{\mu}^{\sigma}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.5995 & 1.4491 & 0.9960 & -0.0033 \\ 1.4491 & 2.1361 & 0.2809 & 0.0083 \\ 0.9960 & 0.2809 & 1.6110 & -0.0095 \\ -0.0033 & 0.0083 & -0.0095 & 1.0005 \end{bmatrix}$$

$$D^{\lambda\mu} = \begin{bmatrix} 0.4537 & -0.2773 & -0.2321 & 0.0016 \\ -0.2773 & 0.6486 & 0.0583 & -0.0057 \\ -0.2321 & 0.0583 & 0.7541 & 0.0059 \\ 0.0016 & -0.0057 & 0.0059 & 0.9996 \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H^{\alpha\beta} = U_{\lambda}^{\alpha} D^{\lambda\mu} U_{\mu}^{\beta *} = \begin{bmatrix} 1.9574 \end{bmatrix}$$

$$t^{\sigma *} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 & 2.8 & -0.37 \end{bmatrix}$$

$$F_{\lambda} = a_{\lambda}^{\zeta *} G_{\zeta\sigma} t^{\sigma} = \begin{bmatrix} -0.7919 \\ -0.1475 \\ -0.5525 \\ 0.0065 \end{bmatrix}$$

$$V^{\beta} = U^{\beta}_{\mu} D^{\lambda\mu} F_{\lambda} = \begin{bmatrix} -0.3370 \end{bmatrix}$$

$$H_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0.51088 \end{bmatrix}$$

$$U^{\beta}_{\circ} = \begin{bmatrix} 1.37 \end{bmatrix}$$

$$C_{\alpha} = H_{\alpha\beta} V^{\beta} + H_{\alpha\beta} U^{\beta}_{\circ} = 0.5277$$

$$\chi^{\mu} = D^{\lambda\mu} U^{\alpha *}_{\lambda} C_{\alpha} - D^{\lambda\mu} F_{\lambda}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0285 \\ 0.2237 \\ 0.3094 \\ 0.5285 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.1901 \\ 0.0917 \\ -0.2414 \\ 0.0028 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1616 \\ 0.1320 \\ 0.5508 \\ 0.5257 \end{bmatrix}$$

$$k_{\zeta} = G_{\zeta\sigma} t^{\sigma} + G_{\zeta\sigma} a^{\sigma}_{\mu} \chi^{\mu}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1509 \\ 0.0748 \\ 0.3836 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1616 \\ 0.1320 \\ 0.5508 \\ 0.5257 \\ -0.1699 \\ -0.0499 \\ -0.7278 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1616 \\ 0.1320 \\ 0.5508 \\ 0.5257 \\ -0.0190 \\ 0.0249 \\ -0.3442 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^i = g^{ik} u_k^{\sigma *} k_\sigma = \begin{bmatrix} 0.1616 \\ 0.1320 \\ 0.5508 \\ 0.5257 \\ 0.0899 \\ 0.0570 \\ -0.3157 \\ -0.3483 \end{bmatrix}$$

$$P^i = p^i + \varepsilon^i = \begin{bmatrix} 42^\circ 38' 50.''672 \\ 41^\circ 33' 08.''962 \\ 37^\circ 48' 38.''141 \\ 57^\circ 59' 22.''486 \\ 29^\circ 37' 43.''840 \\ 54^\circ 34' 15.''697 \\ 70^\circ 46' 15.''124 \\ 25^\circ 01' 35.''452 \end{bmatrix}$$

檢核：

$$E = \varepsilon^{i*} g_{ik} \varepsilon^k = 0.8556$$

$$E = k_\zeta^* t^\zeta + C_\alpha U_\circ^\alpha = 0.1325 + 0.7230$$

$$= 0.8555$$

可知計算無誤。

中誤差：$m = \pm \sqrt{\dfrac{E}{B}} = \pm \sqrt{\dfrac{0.8556}{4}}$

$$= \pm 0.''4624$$

§Ⅶ. 結論

張量是簡化數學問題的一種新 數學，更應用空間觀念，使測量平差法能便捷地解決。但張量式子的表示法和普通所用者略有不同，使人乍看之下感到較不理想，但科學隨著數學進步，若張量因之而為學習測量者所熟悉，其在測量平差法之應用，跟隨著各位學者的研究，或能因此而有新的進展。

§VIII. 參考資料

1. Advanced Engineering Mathamatics
   —— Erwin Kreyszig.
2. Advanced Engineering Mathamatics
   —— C. R. Wylie.
3. Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry —— Tracy Y. Thomas, 1961.
4. Die Mathode der Kleinsten Quarte Moder Darstellung —— J. W. Linnick.
5. Grundzuge der Ausgleichungsrechnung
   —— Groszman.
6. Introduce to Vector and Tensor Analysis
   —— Rorbert C. Wrede, 1963.
7. Linear Algebra —— Serge Lang, 1966.
8. Method of Applied Mathematics
   —— Hilbrand.
9. Tensor Analysis —— L. S. Sokelnikoff, 1964.
10. Tensor Calculus —— Synge Schild, 1956.
11. Tensor Calculus —— B. Spain, 1961.
12. Theory of the Adjustment of Normally Distribution Observation —— J. M. Tienstra, 1956.
13. 工程數學 —— 蔡萬傳, 1965。
14. 次元解析. 最小二乘法と實驗式 —— 本間仁。
15. 測量平差法。